Производная элементарных функций. Правила дифференцирования.

Таблица производных.

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция	Производная
$f(x)=c$	$c'=0$, где c — const
$f(x)=x^{\alpha}$	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=e^x$	$(e^x)'=e^x$
$f(x)=a^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$f(x)=\ln x$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\log_a x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблицу перенести в тетрадь.

Если элементарную функцию умножить на произвольную постоянную, то производная новой функции тоже легко считается:

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'.$$

В общем, константы можно выносить за знак производной. Например:

$$(2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Очевидно, элементарные функции можно складывать друг с другом, умножать, делить — и многое другое. Так появятся новые функции, уже не особо элементарные, но тоже дифференцируемые по определенным правилам. Эти правила рассмотрены ниже.

Производная суммы и разности

Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, производные которых нам известны. К примеру, можно взять элементарные функции, которые рассмотрены выше. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(f - g)' = f' - g'$

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например, $(f + g + h)' = f' + g' + h'$.

Строго говоря, в алгебре не существует понятия «вычитание». Есть понятие «отрицательный элемент». Поэтому разность $f - g$ можно переписать как сумму $f + (-1) \cdot g$, и тогда останется лишь одна формула — производная суммы.

Задача. Найти производные функций: $f(x) = x^2 + \sin x$; $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

Функция $f(x)$ — это сумма двух элементарных функций, поэтому:

$$f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x;$$

Аналогично рассуждаем для функции $g(x)$. Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры):

$$g'(x) = (x^4 + 2x^2 - 3)' = (x^4 + 2x^2 + (-3))' = (x^4)' + (2x^2)' + (-3)' = 4x^3 + 4x + 0 = 4x \cdot (x^2 + 1).$$

Ответ:
$f'(x) = 2x + \cos x$;
$g'(x) = 4x \cdot (x^2 + 1)$.

Производная произведения

Математика — наука логичная, поэтому многие считают, что если производная суммы равна сумме производных, то производная произведения равна произведению производных. Производная произведения считается совсем по другой формуле. А именно:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Формула несложная, но ее часто забывают. И не только школьники, но и студенты. Результат — неправильно решенные задачи.

Задача. Найти производные функций: $f(x) = x^3 \cdot \cos x$; $g(x) = (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x$.

Функция $f(x)$ представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому все просто:

$$f'(x) = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$$

У функции $g(x)$ первый множитель чуть посложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции $g(x)$ представляет собой многочлен, и его производная — это производная суммы. Имеем:

$$g'(x) = ((x^2 + 7x - 7) \cdot e^x)' = (x^2 + 7x - 7)' \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot (e^x)' = (2x + 7) \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x = e^x \cdot (2x + 7 + x^2 + 7x - 7) = (x^2 + 9x) \cdot e^x = x(x + 9) \cdot e^x.$$

Ответ:
$f'(x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$;
$g'(x) = x(x + 9) \cdot e^x$.

Обратите внимание, что на последнем шаге производная раскладывается на множители. Формально этого делать не нужно, однако большинство производных вычисляются не сами по себе, а чтобы исследовать функцию. А значит, дальше производная будет приравниваться к нулю, будут выясняться ее знаки и так далее. Для такого дела лучше иметь выражение, разложенное на множители.

Производная частного

Если есть две функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x) \neq 0$ на интересующем нас множестве, можно определить новую функцию $h(x) = f(x)/g(x)$. Для такой функции тоже можно найти производную:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Задача. Найти производные функций:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$$

По традиции, разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

$$g'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{xe^x(2-x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}; \quad g'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

Сделать конспект с основными формулами и примерами!

Самостоятельная работа.

Найдите производные функций (208—211).

208. а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

209. а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

210. а) $y = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y = \frac{3-4x}{x^2}$.

211. а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$;

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.